

Lagrange 的手法を用いた 高シュミット数スカラー輸送に関する研究

荒川 隆之介 *

*長崎大学大学院 総合生産科学研究科

1 はじめに

乱流中における温度や物質濃度の輸送・混合は、大気・海洋、燃焼、化学反応器などに現れる重要な現象である。なかでも速度場への影響を無視できる温度や濃度は、パッシブスカラーとして扱われる [1]。また流体の動粘性係数 ν とスカラー拡散係数 κ の比を Schmidt 数 $Sc = \nu/\kappa$ と呼ぶ。高 Sc では速度場よりも微細な構造が生じ、最小スケールは Batchelor スケール $\eta_B = \eta/\sqrt{Sc}$ まで小さくなる。

Batchelor[2] は、粘性対流領域のスカラー分散スペクトルが k^{-1} に比例し、2 次構造関数が $\ln r$ に比例すると予測した。その比例係数を特徴づける Batchelor 定数 C_B は乱流混合モデルの重要な定数である。しかし、小さな η_B を直接解像する Euler 的な直接数値計算 (DNS) は高コストであり、粘性対流領域の出現条件や高 Péclet 数における C_B の振る舞いは十分に明らかでない。本研究では、粒子追跡を用いる Lagrange 法によりこの問題を調べた。

2 理論

DNS で得た Navier–Stokes 乱流データベースにおける最終時刻から過去へ粒子を追跡した。粒子位置 $\mathbf{z}$ は Langevin 方程式 [3]

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{z}, t) + \sqrt{2\kappa}\boldsymbol{\xi}(t), \quad (1)$$

に従う。ここで $\mathbf{u}$ は速度、Gauss 統計に従うホワイトノイズ $\boldsymbol{\xi}$ が分子拡散を表す。独立なノイズに従う粒子対から 2 点統計量を直接求めるため、 η_B に合わせたスカラー格子を必要としない。

2 点統計量を効率的に計算するために、平均 0 および分散

$$\langle f_\theta(\mathbf{x}_1, s_1) f_\theta(\mathbf{x}_2, s_2) \rangle_{f_\theta} = F_\theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \delta(s_2 - s_1) \quad (2)$$

によって特徴づけられる Gauss 統計に従う外力に駆動されるパッシブスカラーを考える。

有限な κ に対して、遷移確率は $P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t | \mathbf{x}_0, t_0)) \rangle_{\boldsymbol{\xi}}$ のように与えられるため、スカラー場は以下のように記述できる。

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \langle \theta(\mathbf{z}(t_0 | \mathbf{x}, t), t_0) \rangle_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{t_0}^t ds \langle f_\theta(\mathbf{z}(s | \mathbf{x}, t), s) \rangle_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3)$$

統計的に定常なパッシブスカラーに問題を制限し、式 3 を用いると二点相関関数は以下のように記述できる。

$$\langle \theta(\mathbf{x}, t) \theta(\mathbf{y}, t) \rangle_{f_\theta} = \int_{t_0}^t ds \langle F_\theta(\mathbf{z}(s | \mathbf{y}, t) - \mathbf{z}(s | \mathbf{x}, t)) \rangle_{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2} \quad (4)$$

一様性を利用することで、2 次の構造関数は $S_2^\theta = 2 \left[\langle \theta^2(\mathbf{0}) \rangle_{f_\theta} - \langle \theta(\mathbf{0}) \theta(\mathbf{r}) \rangle_{f_\theta} \right]$ から計算することが可能である。

格子点数 128^3 – 512^3 、Taylor 長 Reynolds 数 $Re_\lambda = 66$ – 275 の一様等方性乱流データベースを用い、 $Sc = 1$ – 10^5 を系統的に計算した。検証用のスカラー DNS も実施しており、 512^3 および 1024^3 と比較する。

3 結果

図 1 に示すように、今回の手法で計算した 2 次構造関数は、粘性拡散領域において、 r^2 に比例する領域が現れ、全ての Sc において同様の傾向が見られる。

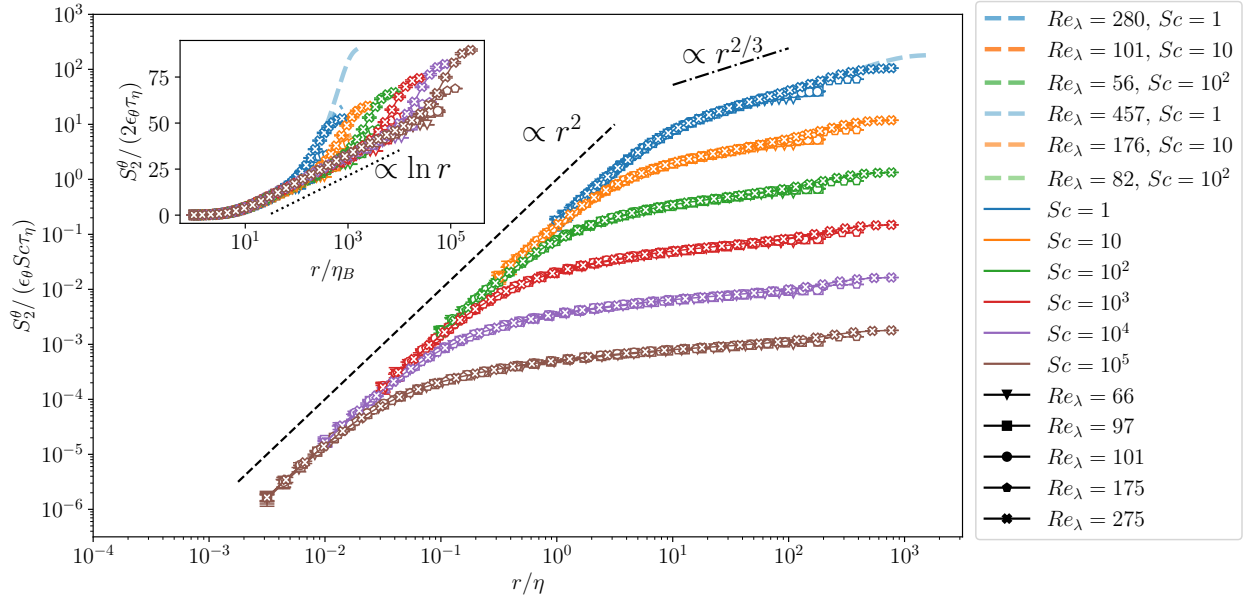


図 1: 各種パラメータにおける無次元化された 2 次構造関数. 色は青, 橙, 緑, 赤, 紫, 茶の順に $Sc = 1-10^5$ を表す. 挿入図では異なるパラメータで無次元化されており, 2 次構造関数の挙動が比較できる.

また低 Sc 領域においては, Kolmogorov–Obukhov–Corrsin スケーリング則 $r^{2/3}$ に比例する慣性対流領域の存在が確認でき, Reynolds 数が増加するにつれ, 慣性対流領域が広がっている様子が確認できる. 加えて Sc の増加に伴って, 2 次構造関数が $\ln r$ に比例する粘性対流領域が拡大する様子が確認できる.

このように DNS との比較が可能な $Sc = 1, 10, 10^2$ の条件において, Lagrange 法で得られた 2 次構造関数が DNS の結果と良好に一致していることから, 提案する Lagrange 法は有効であると考えられる. また Sc が増加するにつれて, $r^{2/3}$ に従うスケーリング則は不明瞭になる傾向が見られ, この傾向は, 渦拡散モデルおよび eddy-damped quasi-normal Markovian (EDQNM) クロージャーモデルにおいても見られる [4].

4 まとめ

提案した Lagrange 法により $Sc = 1-10^5$ を調べ, 計算した 2 次構造関数が Batchelor の予測と整合し, DNS とも良好に一致することを確認した. 一方, 本手法は速度場データベースを必要とし, 高 Sc 側は DNS による直接検証の範囲外である. この成果は現在, 論文として投稿中である.

謝辞

本研究は京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータ共同研究制度 (若手・女性研究者奨励枠) の支援を受けた. 深く御礼申し上げます.

参考文献

- [1] T. Gotoh, P. K. Yeung, P. A. Davidson, Y. Kaneda, and K. R. Sreenivasan, Passive scalar transport in turbulence: A computational perspective, *Ten chapters in turbulence*, pp. 87–131, 2013.
- [2] G. K. Batchelor, Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid Part 1. General discussion and the case of small conductivity, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 5, no. 1, pp. 113–133, 1959.
- [3] U. Frisch, A. Mazzino, A. Noullez, and M. Vergassola, Lagrangian method for multiple correlations in passive scalar advection, *Physics of Fluids*, vol. 11, no. 8, pp. 2178–2186, 1999.
- [4] L. Djenidi, R. A. Antonia, and S. L. Tang, Modelling the transport equation of the scalar structure function, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 946, A42, 2022.