

乱流のエネルギー散逸率とその物理機構

北村 拓也 *

*長崎大学大学院 総合生産科学研究科

1 緒言

乱流の統計理論において、(単位質量当たりの) 平均エネルギー散逸率は、抗力係数、乱流エネルギーの減衰法則、乱流拡散、平均速度分布を決定づける重要な物理量の一つである [1, 2]. 実験や数値計算により、レイノルズ数が増加するにつれ、正規化された平均エネルギー散逸率 $C_\epsilon \equiv \epsilon L/u^3$ が一定になることが示されており、統計的に定常な乱流では、平均エネルギー散逸率は小スケールの特性に依存しないことを示唆している. ここで、 ϵ は平均エネルギー散逸率、 u は速度標準偏差、 L は積分スケールである. 高レイノルズ数において平均エネルギー散逸率が一定を取るといった乱流の第ゼロ法則は、大規模な運動に流入されるエネルギー注入率、エネルギーカスケードの各段階でのエネルギー流束、小規模な運動でのエネルギー散逸が釣り合うといった Richardson–Kolmogorov エネルギーカスケードの抽象の帰結として考えられている [3].

しかしながら、レイノルズ数が無限大の極限において Kolmogorov 理論 [4, 5] が正しいとしても現実世界で見られる程度の有限なレイノルズ数での非定常/非等方性/非一様乱流においてどれほど成り立つかどうかは未だに議論的である. もし、乱流の第ゼロ法則と乱流における Richardson–Kolmogorov エネルギーカスケードの抽象が統計的に定常な乱流に対してのみ有効であるとすれば、その重要性は限られており、乱流理論の再考が求められる. 実際に、乱流の第ゼロ法則の破れは様々な乱流において報告されており、非平衡散逸則と呼ばれる普遍性クラスが非定常乱流や空間発展する乱流の遷移領域において成り立つことが示されている [6, 7].

最近、 C_ϵ と Kármán–Howarth 方程式の積分した形の厳密な関係式が導出され [8]、乱流の第ゼロ法則

の理解において進展が見られた. しかしながら、その有効性は一様等方性乱流において確認されているのみであるため、本研究では、工学的に重要であるせん断乱流を対象とし、理論の拡張ならびに直接数値計算 (DNS) による検証を行った.

2 問題設定

Navier–Stokes 方程式 $\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$ に従う三次元非圧縮性流体を考える. ここで、 $\mathbf{u}$ は速度であり、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を満足する. p は密度で正規化した圧力、 ν は動粘性係数、 $\mathbf{f}$ は乱流を駆動する外力である. 流れ場は、スパン方向を x_1 、流れ方向を x_2 、せん断の垂直方向を x_3 とし、 x_1 および x_2 方向には周期境界条件を用い、 x_3 方向にはフリースリップ境界条件を用いる. また、計算領域は、 $L_1 \times L_2 \times L_3 = 2\pi \times 2\pi \times \pi$ とする. ここで、 L_i は i 方向のサイズである. このとき、速度場は Fourier 級数と $\sin \cdot \cos$ 級数を用いて次のように表す.

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{x}_{12}) \times \begin{cases} \cos(k_3 x_3) & i = 1 \text{ and } 2 \\ \sin(k_3 x_3) & i = 3 \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{k} = [k_1, k_2, k_3]^T$ は波数ベクトル、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数、 $\mathbf{k}_{12} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2$ および $\mathbf{x}_{12} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ である.

DNS では、4 次の Runge-Kutta 法を用いて、NS 方程式を時間積分し、粘性項は解析的に取り扱った. エイリアシングの除去には、2/3 則を用いている. 既往の研究 [9, 10] と同様に、乱流を統計的に定常に維持するために体積力を導入した. 外力は、 $\mathbf{k} = (2n+1)\mathbf{e}_3$ ($n = 0, \dots, 5$) における流れ方向の速度

のフーリエ係数が、余弦のフーリエ和で近似される線形平均流速と一致するように強制力を調整した。

$$U_2(x_3) = -S \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^5 \frac{\cos[(2n+1)x_3]}{(2n+1)^2}, \quad (2)$$

ここで、 S は平均せん断率である。

3 結果

本研究の一部は、京都大学 RIMS ワークショップ [11] および速報誌 [12] として発表済みである。

一様等方性乱流における理論 [8] と同様に、スペクトル方程式を用いると、 C_ϵ は次のように記述される。

$$C_\epsilon = \frac{L}{L_P} \left[C_N + C_A + \frac{C_D}{Re_L} \right] = \alpha_f \tilde{C}_\epsilon \quad (3)$$

ここで、それぞれの項の詳細については、既往の論文 [12] を参照されたい。図 1 に C_ϵ と Re_λ の関係式を示す。 C_ϵ における L の代わりに L_P を用いると、新しく定義される $\epsilon L_P/u^3$ は $\tilde{C}_\epsilon$ と等価である。図 1 の挿入図に $\tilde{C}_\epsilon$ と Re_λ の関係性を示す。 C_ϵ に比べ、 $\tilde{C}_\epsilon$ の方が一様等方性乱流における結果とより良い一致を示す。このことは、強制乱流においては、エネルギー散逸率の正規化には、 L より、外力に基づく積分スケール L_f が好ましいと考えられる。

$\tilde{C}_\epsilon$ において C_A を除いた $C_N + C_D/Re_L$ と Re_λ の関係を図 1 に示す。図 1 に示すように、 C_A の影響は小さく、NS 方程式において本質的な要素である $C_N + C_D/Re_L$ は一様等方性乱流における結果と良好な一致を示す。また、 C_N が一定となるためには、より高いレイノルズ数、一様等方性乱流における結果と調べた範囲のレイノルズ数において良好に一致していることから、高レイノルズ数において、 $C_N \approx \text{const.}$ が期待できる。 $C_N \approx \text{const.}$ の起源や解釈等については今後の課題である。

謝辞

本研究は科学研究助成金 (25K07571), 原田記念財団および日揮・実吉奨学会の援助を受けました。また、本研究で行った計算の一部は京都大学のスーパーコンピュータ共同研究制度 (若手・女性奨励枠) により行われました。ここに謝意を表します。

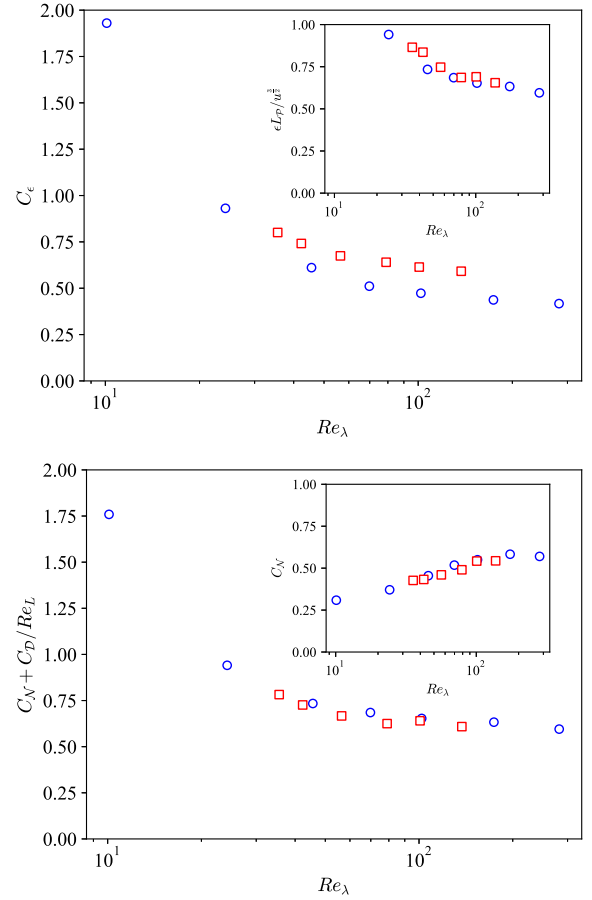


図 1: C_ϵ versus Re_λ , where the inset shows $\epsilon L_P/u^3$ versus Re_λ . The bottom figure shows $C_N + C_D/Re_L$ versus Re_λ , where the inset shows C_N versus Re_λ . Red and blue symbols represent the results for shear turbulence and forced homogeneous isotropic turbulence [8], respectively.

参考文献

- [1] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence* (MIT Press, Cambridge, MA, 1972).
- [2] R. Benzi and F. Toschi, Lectures on turbulence, *Phys. Rep.* **1021**, pp. 1–106 (2023).
- [3] P. A. Davidson, *Turbulence: an introduction for scientists and engineers* (Oxford University Press, 2015) 2nd ed..
- [4] A. N. Kolmogorov, Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **30** pp. 299–303 (1941).
- [5] A. N. Kolmogorov, Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **32** pp. 19–21 (1941).

- [6] J. C. Vassilicos, Dissipation in turbulent flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **47**, pp. 95–114 (2015).
- [7] J. C. Vassilicos, Beyond scale-by-scale equilibrium, *Atmosphere*, **14** 8-pages (2023).
- [8] T. Kitamura, K. Nagata, K. Shimoyama and T. Nanri, On the normalized energy dissipation rate in homogeneous isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **1010**, A14 (2025).
- [9] J. Schuumacher and B. Eckhardt, On statistically stationary homogeneous shear turbulence, *Europhys. Lett.*, **52** pp. 627–632 (2000).
- [10] J. Schuumacher, Derivative moments in stationary homogeneous shear turbulence, *J. Fluid Mech.*, **441** pp. 109–118 (2001).
- [11] T. Kitamura, On the normalized energy dissipation rate in turbulence, RIMS workshop on “Energy dissipation rate in turbulence”, Awaji, Japan (2025).
- [12] T. Kitamura, Normalized energy dissipation rate in shear turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **95**, 014301 (2026).