

機械学習モデルに現れる高次元力学系の解析

中井 拳吾 *

*岡山大学学術研究院 環境生命自然科学学域

本稿は小林 幹氏 (立正大学経済学部)、齊木 吉隆氏、堤 夏輝氏 (一橋大学経営管理研究科) との共同研究に基づくものである。

1 はじめに

時系列データから時間発展モデルを構成する機械学習手法の一つとしてリザーバーコンピューティング [1, 2] が知られている。この手法を用いて流体変数 [3, 4] や気象変数 [5] の時系列データの予測が可能であることが示されている。また、時系列データから構成した機械学習モデルが、不動点、リアプノフ指数をはじめとする様々な力学系的性質を再現することも明らかにってきている [6, 7]。

リザーバーコンピューティングを構成するニューラルネットワークにより得られる中間層の高次元力学系に注目し、学習に用いた時系列データの背後にある力学系が機械学習モデルでどのように実現されているかを明らかにする。このため、本研究では中間層の力学系のリアプノフ指数やリアプノフベクトルを解析する。

2 リザーバーコンピューティング

力学系 $d\phi/dt = \mathbf{f}(\phi)$ の変数 $\mathbf{u} = \mathbf{h}(\phi) \in \mathbb{R}^M$ が観測できるとする。このベクトル $\mathbf{u}$ に対して、リザーバー状態ベクトル $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ ($N \gg M$) を次の式で更新する。 $\mathbf{r}(t+1) = \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\xi})$ 。ただし、 $\mathbf{A}$ は $N \times N$ 行列、 $\mathbf{W}_{\text{in}}$ は $N \times M$ 行列であり、 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \in \mathbb{R}^N$ はバイアス項である。以下ではリザーバー状態ベクトル $\mathbf{r}$ が属する空間 $\mathbb{R}^N$ をリザーバー空間と呼ぶ。 $0 < t \leq L$ (学習時間と呼ぶ) における時系列データ $\{\mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}(t)\}$ が学習データ $\{\mathbf{u}(t)\}$ の近似になるように $\mathbf{W}_{\text{out}}$ を決定する。得られた行列を $\mathbf{W}_{\text{out}}^*$ とする。行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{W}_{\text{in}}$ の与え方や $\mathbf{W}_{\text{out}}^*$ の求め方、学習時間 L 、バイアスパラメー

タ ξ などの各種パラメータの設定を含むリザーバーコンピューティングの詳細については [1, 2] を参照されたい。

予測時間 $t > L$ では以下のように時間発展させる。

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t+1) = \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\hat{\mathbf{u}}(t) + \boldsymbol{\xi}), \\ \hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{W}_{\text{out}}^*\mathbf{r}(t). \end{cases}$$

この式は $\mathbf{r}$ に関する自励力学系に次のように書き換えることができる。

$$\mathbf{r}(t+1) = \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{W}_{\text{out}}^*\mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\xi}). \quad (1)$$

以下では (1) をリザーバーモデルと呼び、この力学系のリアプノフ解析をする。

3 設定と計算結果

3.1 設定と準備

本研究では、学習データとしてエノン写像 $x_{n+1} = 1 - 1.4x_n^2 + y_n$, $y_{n+1} = 0.3x_n$ の時系列データを扱う。 $\mathbf{u}(n) := (x_n, x_{n-1})^T$ として、時系列データ $\{\mathbf{u}(l)\}_{l=1}^L$ を学習し、リザーバーモデルを構成する。このとき、まずスペクトル半径が 1 の行列 $\mathbf{A}'$ を一つ生成し、行列 $\mathbf{A} = \rho\mathbf{A}'$ とすることで、スペクトル半径が ρ の行列 $\mathbf{A}$ を得る。一方で、行列 $\mathbf{W}_{\text{in}}$ は一つ生成した後、 ρ によらず固定する。

これまでの研究で、それぞれのスペクトル半径 ρ に対してリザーバーモデルを構成し、不安定性の度合いを評価する指標であるリアプノフ指数を計算した (図 1)。リザーバーモデルのリアプノフ指数を $\text{RC } i$ ($i = 1, \dots, N$) ($\text{RC } i \geq \text{RC } j$ ($i < j$)) とし、エノン写像の二つのリアプノフ指数を Henon 1, Henon 2 $\approx (0.419, -1.623)$ と表す。この結果から、スペクトル半径が十分小さい場合には、リザーバーモデルの第 1、第 2 リアプノフ指数 $\text{RC } 1$, $\text{RC } 2$ がエノン

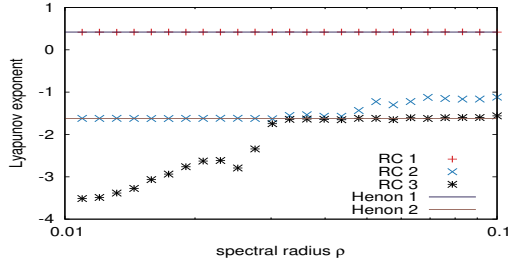


図 1: 行列 $\mathbf{A}$ のスペクトル半径を変えたモデルに対するリザーバー空間でのリアプノフ指数 RC 1, RC 2, RC 3. エノン写像のリアプノフ指数 Henon 1, Henon 2 が、 $\mathbf{A}$ のスペクトル半径 ρ の選び方によらずロバストにモデルのリアプノフ指数に現れている。図示した範囲では常に Henon 1=RC 1 であるが、 $\rho < 0.03$ のときに Henon 2=RC 2 となり、 $0.03 < \rho$ のときに Henon 2=RC 3 となっている。

写像のリアプノフ指数 Henon 1, Henon 2 と対応した。一方で、スペクトル半径が十分小さくない場合には、RC 1, RC 3 がエノン写像のリアプノフ指数 Henon 1, Henon 2 と対応した。

3.2 計算結果

リザーバーモデルのリアプノフ指数 RC i ($i = 2, 3$) に対応するリアプノフベクトルと慣性多様体 [8, 9] の接空間とのなす角の最頻値 $M(i)$ を計算した (図 2)。スペクトル半径が十分小さい場合には $M(2)$ がおよそ 0 となり、スペクトル半径が十分小さくない場合には $M(3)$ がおよそ 0 となっていた。図 1 に示したリアプノフ指数の結果と合わせると、学習データの背後にある力学系のリアプノフ指数に対応するリザーバーモデルのリアプノフベクトルが、およそリザーバー空間内の低次元多様体の接空間に含まれることがわかった。したがって、学習データの背後にある力学系は、この低次元多様体上に実現されていると考えられる。詳細はこれらの結果をまとめた論文 [10] を参照されたい。

3.3 まとめ

リアプノフ指数とリアプノフベクトルの解析から、リザーバーモデルの高次元状態空間内の低次元多様体上に、学習データの背後にある力学系が実現されていることを明らかにした。

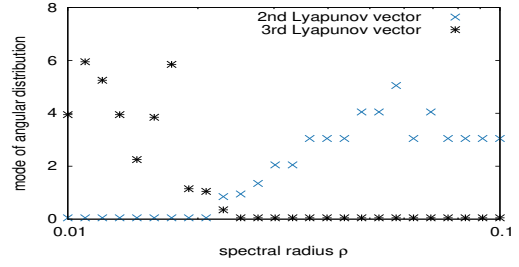


図 2: リザーバーモデルのリアプノフ指数に対応するリアプノフベクトルと、慣性多様体の接空間とのなす角の最頻値。行列 $\mathbf{A}$ のスペクトル半径 ρ を変えたリザーバーモデルの第 i ($i = 2, 3$) リアプノフ指数 RC i に対応するリアプノフベクトルと、数値的に求めた慣性多様体の接空間とのなす角の分布を計算し、その最頻値 $M(i)$ を求めた。 $\rho < 0.02$ のときに $M(2) \approx 0$ である一方で、 $0.025 < \rho$ のときは $M(3) \approx 0$ となっている。

4 謝辞

本研究の一部は京都大学のスーパーコンピュータ共同研究制度 (若手・女性奨励枠) による。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- [1] H. Jaeger, and H. Haas, Science, 304, (2004), 78-80.
- [2] Z. Lu, J. Pathak, B. Hunt, M. Girvan, R. Brockett, and E. Ott, Chaos 27, (2017), 041102.
- [3] K. Nakai, and Y. Saiki, Physical Review E 98, (2018), 023111.
- [4] K. Nakai, and Y. Saiki, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S 14, (2021), 1079-1092.
- [5] T. Jinno, T. Mitsui, K. Nakai, Y. Saiki and T. Yoneda, Chaos 35, (2025), 053149.
- [6] M. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki, and N. Tsutsumi, Physical Review E 104, (2021), 044215.
- [7] M. Kobayashi, K. Nakai, and Y. Saiki, Journal of Physics: Complexity 5, (2024), 025024.
- [8] J. D. Hart, Chaos, 34 (2024), 043123.
- [9] W. Ott, and A. Y. James, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 2.3 (2003), 297-322.
- [10] M. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki and N. Tsutsumi, Chaos 36 (2026), 053115.